МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Научно-исследовательский вычислительный центр

О. Б. Арушанян, С. Ф. Залеткин

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА И КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ МАРКОВА

Учебное пособие

Москва, 2024

О.Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин

Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на основе применения рядов Чебышёва и квадратурной формулы Маркова

(Учебное пособие)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение. Настоящее учебное пособие является четвертым в серии учебных пособий, посвященных изучению связанных с ортогональными многочленами численно-аналитических методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Изложенные в первых трех пособиях [1–3] основные теоретические положения, касающиеся ортогональных разложений функций и квадратурных формул Маркова, и разработанные на их основе вычислительные приемы используются в данном руководстве в качестве средства конструирования численно-аналитических методов интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. В связи с этим излагаемый материал сопровождается, при необходимости, подробными ссылками на эти учебные пособия.

Данное пособие состоит из десяти разделов.

В первом разделе формулируется главная концепция, в соответствии с которой будет строиться метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.

Второй, третий и четвертый разделы отражают отдельные этапы конструирования метода, в результате чего основная задача интегрирования сводится к системе конечных уравнений относительно приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части исходных дифференциальных уравнений. По существу, эта система конечных уравнений и есть квадратурная формула Маркова.

В пятом и шестом разделах дается описание метода последовательных приближений для нахождения искомых коэффициентов Чебышёва.

В седьмом разделе формулируется и доказывается теорема, которая по своему значению является строгим обоснованием, можно даже сказать, фундаментом, для изучаемого в данном пособии метода интегрирования. В ней приводятся условия, при которых построенная система конечных уравнений относительно коэффициентов Чебышёва имеет единственное решение, и показывается сходимость итерационного метода нахождения этих коэффициентов. Эта теорема доказывается *методом неподвижных точек* или, другими словами, основывается на *принципе сжатых отображений.*

В восьмом разделе приводится приближенное решение задачи Коши в виде аналитического выражения, которым является в данном методе частичная сумма смещенного ряда Чебышёва. Здесь дается также асимптотическая оценка погрешности приближенного решения на одном элементарном сегменте.

В девятом разделе рассматриваются практические способы оценки погрешности приближенного решения на одном элементарном сегменте, опирающиеся на использование второго приближенного решения более высокого порядка точности.

Наконец, десятый раздел посвящен интегрированию дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва с контролем точности. Здесь описывается алгоритм автоматического разбиения области интегрирования на частичные (элементарные) сегменты, позволяющий вычислять приближенное решение на этих сегментах с наперед заданной точностью.

Предлагаемое учебное пособие предназначено для студентов механико-математического факультета МГУ, однако может быть полезно студентам, аспирантам и научным сотрудникам также и других факультетов МГУ, интересующимся вопросами численного интегрирования и полиномиальной аппроксимации решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Разложение решения задачи Коши для нормальной системы и его производной в ряды Чебышёва. Рассматривается задача Коши для нормальной системы M обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + X. \tag{1}$$

Предполагается, что функция $f(x, y)$ имеет в области определения системы непрерывные ограниченные частные производные первого порядка по переменным x и y. Предполагается также, что на отрезке $[x_0,\, x_0 + X]$ задача Коши (1) имеет единственное решение.

Выберем некоторое число $h \leqslant X$ и рассмотрим на частичном сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ задачу Коши (1). Пусть

$$\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h) = f\bigl(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h)\bigr), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1. \tag{2}$$

Указанная гладкость правой части в (1) влечет выполнение достаточных условий равномерной на $[x_0,\, x_0 + h]$ сходимости смещенных рядов Чебышёва для решения

$$y(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[y] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{y(x_0 + \alpha h) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha \tag{3}$$

и его производной[1]

$$\Phi(\alpha) = {\sum_{i=0}^{\infty}}' a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \qquad a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^1 \frac{\Phi(\alpha) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}\, d\alpha \tag{4}$$

(штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем 1/2). Коэффициенты Чебышёва решения $y(x_0 + \alpha h)$ связаны с коэффициентами Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ следующими соотношениями:

$$a_i^*\bigl[y(x_0 + \alpha h)\bigr] = \frac{h}{4i} \bigl(a_{i-1}^*[\Phi] - a_{i+1}^*[\Phi]\bigr), \qquad i > 0, \tag{5}$$

$$\frac{1}{2} a_0^*\bigl[y(x_0 + \alpha h)\bigr] = y_0 + \frac{h}{4}\Bigl(a_0^*[\Phi] - \frac{1}{2}\, a_1^*[\Phi]\Bigr) - \frac{h}{2} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2 - 1}\, a_j^*[\Phi]. \tag{6}$$

[1] Достаточные условия равномерной сходимости рядов Чебышёва обстоятельно изложены в нашем учебном пособии [1]. Там же приводится подробный вывод соотношений (5), (6) между коэффициентами Чебышёва (см., например, следствие из теорем 1 и 2 в разделе 1 в [1] и формулы (11), (12) в разделе 1 в [1]). Поэтому читателя, желающего углубить свои знания по этим аспектам теории, мы отсылаем к указанному учебному руководству [1].

Если коэффициенты разложения (4) известны, то коэффициенты разложения (3) могут быть легко получены по формулам (5), (6). Но эти коэффициенты нам не известны. Поэтому дальнейшая цель наших рассуждений состоит в том, чтобы предложить способ определения коэффициентов $a_i^*[\Phi]$. Для этого мы перейдем к выводу уравнений, которым удовлетворяют приближенные значения коэффициентов Чебышёва правой части, а затем и к описанию алгоритма решения этих уравнений. Мы примем также дополнительное соглашение о более высокой гладкости правой части дифференциального уравнения (1), а именно, будем предполагать, что $f(x, y)$ имеет столько непрерывных частных производных по x и y, сколько это необходимо для того, чтобы были обоснованы выполняемые ниже преобразования и справедливы приводимые оценки для погрешности рассматриваемого метода.

2. Аппроксимация правой части системы частичной суммой ряда Чебышёва. Рассмотрим k-ю частичную сумму ряда (4) для правой части (2) дифференциального уравнения (1), взятой на решении задачи Коши:

$$S_k(\alpha, \Phi) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[\Phi] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{7}$$

Вместо точных коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ используем их приближенные значения. Для этого коэффициенты $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, входящие в частичную сумму (7), вычислим по квадратурной формуле наивысшей алгебраической степени точности, например, по квадратурной формуле Маркова[2] для отрезка $[0, 1]$ с одним фиксированным узлом $\alpha = 0$, числом нефиксированных узлов k и весовой функцией $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}$:

$$a_i^*[\Phi] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Phi\big(\alpha_j^{(1)}\big) T_i^*\big(\alpha_j^{(1)}\big) + R(\Phi \cdot T_i^*), \qquad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{8}$$

Абсциссы $\alpha_j^{(1)}$ и остаточный член $R(\Phi \cdot T_i^*)$ данной квадратуры определяются следующим образом:

$$\alpha_0^{(1)} = 0, \qquad \alpha_j^{(1)} = \frac{1 + \cos \dfrac{(2j-1)\pi}{2k+1}}{2}, \qquad j = 1, 2, \ldots k, \tag{9}$$

[2]Теория квадратурных формул Маркова, как с одним, так и с двумя наперед заданными узлами, и методика их применения для определения коэффициентов ортогональных разложений во всех подробностях изложены в наших учебных пособиях [2, 3]. Там же изучены свойства частичных сумм смещенных рядов Чебышёва с приближенными коэффициентами, вычисленными по формулам Маркова. Поэтому читателя, желающего углубить свои знания по этим вопросам теории, мы отсылаем к указанным учебным руководствам [2, 3].

$$R(\Phi \cdot T_i^*) = R_i = \frac{1}{2^{4k}} \frac{(\Phi \cdot T_i^*)^{(2k+1)}(\eta)}{(2k+1)!}, \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \tag{10}$$

(см. формулы (80), (82), (81) при $n = k$ в [2]). Абсциссы $a_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, являются нулями многочлена Якоби $P_k^{(-1/2,\,1/2)}(2a-1)$ и совпадают с нечетными нулями смещенного многочлена Чебышёва второго рода $U_{2k}^*(\alpha)$ степени $2k$ (см. п. 1.1 и 1.2 в [2]). Подставляя (8) в (4), получим

$$\Phi(\alpha) = J_k(\alpha) + {\sum_{i=0}^{k}}' R_i T_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi), \tag{11}$$

где

$$J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(\frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Phi\big(\alpha_j^{(1)}\big) T_i^*(\alpha^{(1)}) \Big) T_i^*(\alpha), \tag{12}$$

$r_k(\alpha, \Phi)$ — k-й остаток смещенного ряда Чебышёва (4).

Формула (12) дает простое выражение для коэффициентов Чебышёва многочлена $J_k(\alpha)$:

$$a_i^*[J_k] = \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \Phi\big(\alpha_j^{(1)}\big) T_i^*\big(\alpha_j^{(1)}\big), \quad i = 0, 1, \ldots, , k. \tag{13}$$

С учетом (13) многочлен (12) может быть записан в виде

$$J_k(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k}}' a_i^*[J_k] \cdot T_i^*(\alpha). \tag{14}$$

Этот многочлен является интерполяционным многочленом для $\Phi(\alpha)$ с узлами интерполирования, совпадающими с абсциссами (9) использованной квадратурой формулы Маркова (см. теорему 1 в п. 5.2 в [2]).

Квадратурная формула Маркова (8) принимает следующий вид:

$$a_i[\Phi] = a_i^*[J_k] + R_i, \quad i = 0, 1, \ldots, k. \tag{15}$$

Если для вычисления коэффициентов $a_i^*[\Phi]$ в (7) использовать квадратурную формулу Маркова для отрезка $[0, 1]$ с двумя фиксированными (т.е. наперед заданными) узлами $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, с k нефиксированными узлами и весовой функцией $1/\sqrt{\alpha(1-\alpha)}$:

$$a_i^*[\Phi] = \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' \Phi(\alpha_j^{(2)}) T_i^*(\alpha_j^{(2)}) + R(\Phi \cdot T_i^*) = a_i^*[L_k] + R(\Phi \cdot T_i^*), \tag{16}$$

где

$$\alpha_0^{(2)} = 0, \qquad \alpha_j^{(2)} = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{j\pi}{k+1}\Big), \qquad j = 1, \ldots, k, \qquad \alpha_{k+1}^{(2)} = 1, \tag{17}$$

$$a_i^*[L_k] = \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}''\,\Phi(\alpha_j^{(2)})T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \tag{18}$$

$$R(\Phi\cdot T_i^*) = -\frac{1}{2^{4k+2}}\,\frac{(\Phi\cdot T_i^*)^{2k+2}(\eta)}{(2k+2)!}\,, \tag{19}$$

(см. формулы (45), (46), (47), (43), (44) при $n = k$ в [3]; два штриха у знака суммы означают, что слагаемые с индексами 0 и $k+1$ берутся с дополнительным множителем $1/2$), то полученная таким же способом частичная сумма

$$L_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}'\,a_i^*[L_k]T_i^*(\alpha) \tag{20}$$

является многочленом степени k наилучшего равномерного приближения для $\Phi(\alpha)$ на множестве узлов $\alpha_j^{(2)}$, $j = 0, 1, \ldots, k+1$, этой квадратурной формулы (см. теорему 1 в п. 5.2 в [3]).

Аппроксимируем функцию $\Phi(\alpha)$ многочленом $P_k(\alpha)$, где $P_k(\alpha) = J_k(\alpha)$ или $P_k(\alpha) = L_k(\alpha)$, т.е. k-й частичной суммой смещенного ряда Чебышёва, коэффициенты которого вычислены по той или иной квадратурной формуле Маркова. Погрешность аппроксимации состоит из остаточного члена $r_k(\alpha, \Phi)$ ряда Чебышёва и ошибок R_i численного интегрирования в приближенных значениях коэффициентов Чебышёва:

$$\Phi(\alpha) - P_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}'\,R_iT_i^*(\alpha) + r_k(\alpha, \Phi). \tag{21}$$

При этом, если $P_k(\alpha) = J_k(\alpha)$, то погрешность (10) приближенных значений коэффициентов $a_i^*[J_k]$ имеет вид

$$R_i = R(\Phi\cdot T_i^*) = \frac{1}{2^{4k}(2k+1)!}\sum_{l=0}^{i} C_{2k+1}^l\Phi^{(2k+1-l)}(\eta)T_i^{*(l)}(\eta), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{22}$$

Это следует из формулы Лейбница для производной $(\Phi\cdot T_i^*)^{(2k+1)}$ произведения функций $\Phi(\alpha)$ и $T_i^*(\alpha)$. Если $P_k(\alpha) = L_k(\alpha)$, то погрешность (19) приближенных значений коэффициентов $a_i^*[L_k]$ имеет вид

$$R_i = R(\Phi\cdot T_i) = -\frac{1}{2^{4k+2}(2k+2)!}\sum_{l=0}^{i} C_{2k+2}^l\Phi^{(2k+2-l)}(\eta)T_i^{*(l)}(\eta), \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant 1. \tag{23}$$

Применяя оценки для остатка ряда Чебышёва в (21) и остатков квадратурной формулы Маркова[3] (22), (23), можно показать, что суммарная погрешность (21) имеет порядок $O(h^{k+1})$ при $h \to 0$. Таким образом, справедливо равенство

$$y'(x) = y'(x_0 + \alpha h) = P_k(\alpha) + O(h^{k+1}), \qquad h \to 0. \tag{24}$$

3. Вывод уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части системы. Оценка невязки ρ_i. Проинтегрируем левую часть уравнения (24) по x на $[x_0,\, x]$, а правую часть этого же уравнения — по α на $[0,\, \alpha]$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, т.е. интегрируем (24) с использованием формулы замены переменной $x = x_0 + \alpha h$:

$$y(x) = y(x_0) + h \int\limits_0^{\alpha} P_k(\xi) d\xi + O(h^{k+2}). \tag{25}$$

Отбросим остаточный член, а оставшуюся правую часть

$$U(x_0 + \alpha h) = y(x_0) + h \int\limits_0^{\alpha} P_k(\xi) d\xi$$

представим в виде линейной комбинации смещенных многочленов Чебышёва. Тогда

$$y(x) \approx U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[U] T_i^*(\alpha). \tag{26}$$

Заметим, что $U(x_0) = y(x_0)$. Коэффициенты $a_i^*[U]$ в (26) вычисляются с помощью соотношений (5) при $i = 1, \ldots, k+1$ и (6) при $i = 0$, в левых частях которых надо y заменить на U, а в правых частях необходимо $a_l^*[\Phi]$ поменять на коэффициенты Чебышёва $a_l^*[P_k]$ многочлена $P_k(\alpha)$.

Подставим полином $U(x_0 + \alpha h)$ в правую часть дифференциального уравнения (1) вместо $y(x_0 + \alpha h)$. Тогда

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0 + \alpha h,\, y(x_0 + \alpha h)\big) \approx f\big(x_0 + \alpha h,\, U(x_0 + \alpha h)\big) = \tilde{\Phi}(\alpha)$$

и

$$\Phi(\alpha) - \tilde{\Phi}(\alpha) = \begin{cases} O(h^{k+2}) & \text{для} \quad y' = f(x, y), \\ 0 & \text{для} \quad y' = f(x). \end{cases} \tag{27}$$

[3] Достаточно подробный вывод оценки для остаточного члена ряда Чебышёва и оценки для остаточного члена квадратурных формул Маркова приведен в наших учебных пособиях [2, 3], к которым мы отсылаем читателя. Там же получена оценка погрешности аппроксимации правой части дифференциального уравнения частичной суммой смещенного ряда Чебышёва с приближенными коэффициентами, вычисленными по квадратурной формуле Маркова (см. формулу (165) для $\|\Phi(\alpha) - J_k(\alpha)\|_\infty$ в п. 6.3 в [2] и аналогичную оценку для $\|\Phi(\alpha) - L_k(\alpha)\|_\infty$ в разделе 6 в [3]).

Определим числа $a_i^*[\tilde{P}_k]$, $i = 0, 1, \ldots, k$ и многочлен $\tilde{P}_k(\alpha)$ следующим способом. Если используется формула Маркова (8) с одним фиксированным узлом, то

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)}) T_i^*(\alpha_j^{(1)}). \tag{28}$$

Если используется формула Маркова (16) с двумя фиксированными узлами, то

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(2)}) T_i^*(\alpha_j^{(2)}). \tag{29}$$

Пусть

$$\tilde{P}_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\tilde{P}_k] T_i^*(\alpha).$$

Числа $a_i^*[\tilde{P}_k]$ являются коэффициентами Чебышёва многочлена $\tilde{P}_k(\alpha)$. Значения $\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)})$, $\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(2)})$ в (28), (29) зависят от функции $U(x_0 + \alpha h)$, которая, в свою очередь, зависит от коэффициентов Чебышёва $a_l^*[P_k]$. Поскольку точное решение $y(x_0 + \alpha h)$ системы (1), а следовательно, и функция $\Phi(\alpha)$ нам не известны, то коэффициенты $a_i^*[P_k]$, совпадающие с $a_i^*[J_k]$ в (13), (14) или с $a_i^*[L_k]$ в (18), (20), являются неизвестными величинами. Будем определять коэффициенты Чебышёва функции $U(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[U] T_i^*(\alpha)$ с помощью соотношений (5), (6), в которых надо y заменить на U, а $a_l^*[\Phi]$ — на $a_l^*[\tilde{P}_k]$ из (28) или (29). Поэтому соотношения (28) и (29) предствляют собой системы уравнений относительно коэффициентов $a_i^*[\tilde{P}_k]$.

Рассматривая $U(x_0 + \alpha h)$ как функцию не только аргумента $x_0 + \alpha h$, но и аргументов $a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]$, т.е. считая ее функцией нескольких переменных вида

$$U\big(x_0 + \alpha h;\, a_0^*[\tilde{P}_k],\, a_1^*[\tilde{P}_k],\, \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big),$$

систему уравнений (28) можно представить таким способом:

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' f\big(x_j^{(1)}, U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big) T_i^*(\alpha_j^{(1)}), \tag{30}$$

где $x_j^{(1)} = x_0 + \alpha_j^{(1)} h$. Аналогично представляется система уравнений (29):

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' f\big(x_j^{(2)}, U(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big) T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \tag{31}$$

где $x_j^{(2)} = x_0 + \alpha_j^{(2)} h$. Обе системы (30) и (31) могут быть записаны в виде:

$$a_i^*[\tilde{P}_k] = \varphi_i\big(a_0^*[\tilde{P}_k], a_1^*[\tilde{P}_k], \, \ldots \, , a_k^*[\tilde{P}_k]\big), \qquad i = 0, 1, \, \ldots \, , k, \tag{32}$$

где φ_i — правая часть (30) или (31) соответственно. Ниже мы докажем, что система (32) имеет единственное решение, которое может быть найдено методом последовательных приближений (см. п. 6).

Подставляя в (32) вместо $a_r^*[\tilde{P}_k]$ точные значения коэффициентов Чебышёва $a_r^*[\Phi]$ правой части $\Phi(\alpha)$ уравнения (1), получим

$$a_i^*[\Phi] = \varphi_i\big(a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \, \ldots \, , a_k^*[\Phi]\big) + \rho_i. \tag{33}$$

Оценим невязку ρ_i в (33). Левую часть в (33) в силу (15), (16) можно представить в виде $a_i^*[P_k] + R_i$. Для значений

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_0 + \alpha_j h, U(x_0 + \alpha_j h;\, a_0^*[\Phi], a_1^*[\varphi], \, \ldots \, , a_k^*[\Phi])\big),$$

фигурирующих под знаком суммы в (30) или (31) в представлении для φ_i из формулы (33), будут справедливы соотношения, аналогичные соотношениям (27). Выразим эти значения с помощью (27) через $\Phi(\alpha_j)$ и правую часть равенства (27). Тогда величина φ_i в правой части (33) в силу (13) и (18) будет равна $a_i^*[P_k] + O(h^{k+2})$. Так как остаточный член R_i квадратурной формулы Маркова для коэффициента $a_i^*[P_k]$ имеет порядок $O(h^{2k+s-i})$, где $s = 1$ для формулы Маркова с одним фиксированным узлом и $s = 2$ для формулы Маркова с двумя фиксированными узлами, то невязка, которая при этом получается, будет иметь порядок

$$\rho_i = R_i + O(h^{k+2}) = O(h^{2k+s-i}) + O(h^{k+2}) \quad \text{при} \quad h \to 0,$$

а именно:

$$\begin{aligned} &\rho_k = O(h^{k+1}), \quad \rho_i = O(h^{k+2}), \quad i = 0, 1, \, \ldots \, , k-1 \;\; \text{при} \;\; s = 1 \;\; \text{и} \\ &\rho_i = O(h^{k+2}), \quad i = 0, 1, \, \ldots \, , k \;\; \text{при} \;\; s = 2. \end{aligned} \tag{34}$$

Если в уравнении (1) функция $f(x, y)$ не зависит от y, т.е. система (1) имеет форму $y' = f(x)$, то $\rho_i = O(h^{2k+s-i})$, $i = 0, 1, \, \ldots \, , k$. Таким образом, имеем

$$\max_i \big| a_i^*[\Phi] - \varphi_i\big(a_0^*[\Phi], a_1^*[\Phi], \, \ldots \, , a_k^*[\Phi]\big)\big| = O(h^{k+s}). \tag{35}$$

4. Оценка погрешности приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части системы. Полученные асимптотические оценки

(34) для невязки ρ_i из (33) окажутся весьма полезными в дальнейшем и будут, например, использованы в п. 7 при доказательстве теоремы существования единственного решения системы уравнений (32) относительно коэффициентов Чебышёва, а пока допустим, что система (32) имеет единственное решение $a_i^*[\tilde{P}_k]$, $i=0,1,\,\ldots\,,k$. Обозначим $\delta_i = a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde{P}_k]$, $i=0,1,\,\ldots\,,k$. Вычитая из (33) уравнение (32) и используя формулу конечных приращений Лагранжа, будем иметь для случая квадратурной формулы Маркова (30) с одним фиксированным узлом:

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_j^{(1)},\hat{y})}{\partial y}\left[U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\Phi],\,\ldots\,,a_k^*[\Phi]) - \right.$$
$$\left. - U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k],\,\ldots\,,a_k^*[\tilde{P}_k])\right] T_i^*(\alpha_j^{(1)}) + \rho_i.$$

Применим еще раз формулу конечных приращений Лагранжа к разностям для U:

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1}\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_j^{(1)},\hat{y})}{\partial y}\left[\sum_{m=0}^{k}\frac{\partial U(x_j^{(1)},\hat{a}_0,\,\ldots\,,\hat{a}_k)}{\partial a_m^*[\Phi]}\,\delta_m\right] T_i^*(\alpha_j^{(1)}) + \delta_i.$$

В производных $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial U}{\partial a_m^*}$ аргументы $\hat{y}, \hat{a}_0,\,\ldots\,,\hat{a}_k$ берутся в соответствии с теоремой Лагранжа о среднем значении. Поменяем местами порядок суммирования:

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1}\sum_{m=0}^{k}\left[\sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f(x_j^{(1)},\hat{y})}{\partial y}\,\frac{\partial U(x_j^{(1)};\,\hat{a}_0,\,\ldots\,,\hat{a}_k)}{\partial a_m^*[\Phi]}\,T_i^*(\alpha_j^{(1)})\right]\delta_m + \rho_i.$$

Как видно из (5), (6), скалярная матрица $\dfrac{\partial U}{\partial a_m^*}$ порядка M содержит множитель h, поэтому последнее равенство может быть представлено в виде

$$\delta_i = \frac{4}{2k+1}\sum_{m=0}^{k} hQ_{im}\delta_m + \rho_i, \qquad i=0,1,\,\ldots\,,k, \tag{36}$$

где Q_{im} — квадратные матрицы порядка M, зависящие от i и m (напомним, что M — это число уравнений в системе (1)).

Пусть $\delta = (\delta_0,\delta_1,\,\ldots\,,\delta_k)^T$, $\rho = (\rho_0,\rho_1,\,\ldots\,,\rho_k)^T$, Q — блочная матрица порядка $(k+1)$ с элементами Q_{im}. Тогда систему уравнений (36) можно представить в виде

$$\delta = \frac{4}{2k+1}\,hQ\delta + \rho. \tag{37}$$

Из (37) вытекает, что δ имеет тот же порядок относительно h, что и невязка ρ, т.е. $\delta = O(h^{k+1})$ в соответствие с (34).

Для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ сумма (36) равна

$$\sum_{m=0}^{k} hQ_{im}\delta_m = O(h^{k+2}), \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

Поэтому из (36) и (34) следует, что δ_i имеет такой же порядок относительно h, что и невязка ρ_i, т.е.

$$\delta_k = O(h^{k+1}), \quad \delta_i = O(h^{k+2}), \quad 0 \leqslant i \leqslant k-1. \tag{38}$$

Итак, погрешность коэффициента $a_k^*[\tilde{P}_k]$ — суть величина порядка $O(h^{k+1})$, а погрешности δ_i остальных коэффициентов $a_i^*[\tilde{P}_k]$, $0 \leqslant i \leqslant k-1$ — величины порядка $O(h^{k+2})$. Приведенные оценки верны, если $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x, y до порядка $2k+1$ включительно. Для дифференциального уравнения $y' = f(x)$ имеем $\delta_i = \rho_i = O(h^{2k+1-i})$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

В случае квадратурной формулы Маркова (31) с двумя фиксированными узлами аналогично получается оценка погрешности

$$\delta_i = O(h^{k+2}), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \tag{39}$$

из которой следует, что погрешности приближенных значений всех коэффициентов $a_i^*[\tilde{P}_k]$, $i = 0, 1, \ldots, k$ — меры порядка $O(h^{k+2})$. Оценка верна, если $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x, y до порядка $2k+2$ включительно. Для уравнения $y' = f(x)$ имеем $\delta_i = \rho_i = O(h^{2k+2-i})$, $0 \leqslant i \leqslant k$.

5. Определение начального приближения для коэффициентов Чебышёва правой части системы. Как было сказано выше, систему уравнений (32) относительно приближенных коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\tilde{P}_k]$ правой части системы (1) предполагается решать методом последовательных приближений. Перейдем теперь к изучению вопроса об определении начального приближения для искомых коэффициентов.

Здесь мы рассмотрим два способа определения начального приближения. Мы предполагаем, что правая часть $f(x, y)$ дифференциального уравнения (1) имеет нужное число непрерывных частных производных, обеспечивающих справедливость приводимых оценок и обоснованность выполняемых преобразований.

5.1. Первый способ определения начального приближения. Опишем этот способ для частичного сегмента $[x_0, x_0 + h]$, $0 < h \leqslant X$, на котором приближенное решение ищется в виде конечной суммы ряда.

Напомним, что в системе (32) $\tilde{P}_k$ — k-я частичная сумма смещенного ряда Чебышёва правой части системы (1) на сегменте $[x_0, x_0 + h]$, U — $(k+1)$-я частичная сумма смещенного ряда Чебышёва для решения задачи (1) на том же сегменте, a_i^* — значения коэффициентов смещенного ряда Чебышева и $T_i^*(\alpha)$ — смещенные многочлены Чебышева первого рода. Положим

$$\frac{1}{2}\, a_0^*[\tilde{P}_k] = \frac{1}{2}\, a_0^*\big[f(x_0, y_0)\big] = f(x_0, y_0)$$

и определим приближенные значения первых двух коэффициентов Чебышёва решения:

$$a_1^*[U] = \frac{h}{4}\, a_0^*[\tilde{P}_k], \qquad \frac{1}{2}\, a_0^*[U] = y_0 + \frac{h}{4}\, a_0^*[\tilde{P}_k].$$

В качестве нулевого приближения для $a_i^*[\tilde{P}_k]$ возьмем значения, определяемые по одной из квадратурных формул Маркова в зависимости от того, какая квадратурная формула положена в основу данного метода, т.е. для вычисления интеграла в (4): с одним наперед заданным узлом (формула (8), в этом случае положим $s = 1$) или с двумя наперед заданными узлами (формула (16), в этом случае полагаем $s = 2$). Теперь эти формулы применяются для функции $\tilde{\Phi}(\alpha) = f(x_0 + \alpha h,\, U(x_0 + \alpha h))$: при $s = 1$

$$\begin{aligned} a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] &= \frac{4}{2k+1} {\sum_{j=0}^{k}}' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)}) T_i^*(\alpha_j^{(1)}) = \frac{2(-1)^i}{2k+1}\, \tilde{\Phi}(0) + \\ &\quad + \frac{4}{2k+1} \sum_{j=1}^{k} \cos\frac{i(2j-1)\pi}{2k+1}\, \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)}), \quad i = 0, 1, \ldots, k, \end{aligned} \tag{40}$$

при $s = 2$

$$\begin{aligned} a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] &= \frac{2}{k+1} {\sum_{j=0}^{k+1}}'' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(2)}) T_i^*(\alpha_j^{(2)}) = \frac{(-1)^i}{k+1}\, \tilde{\Phi}(0) + \\ &\quad + \frac{1}{k+1}\, \tilde{\Phi}(1) + \frac{2}{k+1} \sum_{j=1}^{k} \cos\frac{ij\pi}{k+1}\, \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(2)}), \quad i = 0, 1, \ldots, k. \end{aligned} \tag{41}$$

Здесь: узлы $\alpha_j^{(s)}$ определяются по (9) или (17);

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(s)}) = f\big(x_0 + \alpha_j^{(s)} h,\, U(x_0 + \alpha_j^{(s)} h)\big), \qquad s = 1 \quad \text{или} \quad s = 2.$$

Значения приближенного решения в узлах первой квадратуры (40) вычисляются с помощью линейного многочлена по первым двум коэффициентам Чебышёва; с учетом (9) получаем:

$$
\begin{aligned}
U(x_0+\alpha_j^{(1)}h) &= \frac{1}{2}a_0^*[U]\cdot T_0^*(\alpha_j^{(1)}) + a_1^*[U]\cdot T_1^*(\alpha_j^{(1)}) = \\
&= \frac{1}{2}a_0^*[U] + a_1^*[U]\cdot\cos\frac{(2j-1)\pi}{2k+1}\,, \qquad j=1,2,\,\dots\,,k.
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Значения приближенного решения в узлах второй квадратуры (41) вычисляются аналогично; с учетом (17) получаем:

$$
\begin{aligned}
U(x_0+\alpha_j^{(2)}h) &= \frac{1}{2}a_0^*[U]\cdot T_0^*(\alpha_j^{(2)}) + a_1^*[U]\cdot T_1^*(\alpha_j^{(2)}) = \\
&= \frac{1}{2}a_0^*[U] + a_1^*[U]\cdot\cos\frac{j\pi}{k+1}\,, \qquad j=0,1,\,\dots\,,k;
\end{aligned}
\tag{43}
$$

(значение $j=0$ в (43) соответствует значению $\alpha=1$, значению $x=x_0+h$, а также значению $U(x_0+h)$). Значения $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$ имеют погрешность $O(h^2)$. Дальнейшее уточнение значений коэффициентов выполняется с помощью итерационного процесса так, как описано ниже в п. 6. Для погрешности полученных в результате итерационного процесса приближенных значений $a_i^*[\tilde{P}_k]$ коэффициентов Чебышёва справедлива асимптотическая оценка, которая следует из (38), (39):

$$
a_k^*[\Phi]-a_k^*[\tilde{P}_k]=O(h^{k+s}),\quad a_i^*[\Phi]-a_i^*[\tilde{P}_k]=O(h^{k+2}),\quad 0\leqslant i\leqslant k-1,\quad h\to 0. \tag{44}
$$

где

$$
\Phi(\alpha)=F(x_0+\alpha h)=f\bigl(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h)\bigr),\qquad 0\leqslant\alpha\leqslant 1. \tag{45}
$$

После уточнения начального приближения для коэффициентов методом последовательных приближений и, в конечном счете, после получения разложения решения задачи Коши(1) в ряд Чебышёва на сегменте $[x_0,\,x_0+h]=[x_0,\,x_1]$ длиной h можно перейти к построению разложения решения задачи в ряд Чебышёва на следующем элементарном сегменте $[x_1,\,x_1{+}h^*]$ некоторой длиной h^*, вообще говоря, отличной от h. Описанный здесь способ построения начального приближения для коэффициентов Чебышёва правой части $f\bigl(x,\,y(x)\bigr)$ может быть применен без изменений для построения начального приближения коэффициентов Чебышёва правой части на следующем элементарном сегменте $[x_1,\,x_1{+}h^*]=[x_1,\,x_2]$, если принять точку x_1 за начальную точку этого сегмента.

В рассмотренном способе используется только значение решения на левом конце текущего элементарного сегмента (подынтервала) интегрирования, поэтому приведенный алгоритм может быть применен на любом частичном сегменте $[x_n, x_n+h] \subset [x_0, x_0+X]$ внутри заданного промежутка интегрирования.

5.2. Второй способ определения начального приближения. Описанный ниже способ опирается на экстраполяцию коэффициентов Чебышёва с предыдущего сегмента на следующий. Покажем, как коэффициенты Чебышёва разложения функции (45) могут быть использованы для получения коэффициентов Чебышёва разложения функции

$$\Phi_1(\alpha) = F(x_1+\alpha h^*) = f\bigl(x_1+\alpha h^*, y(x_1+\alpha h^*)\bigr), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \qquad x_1 = x_0 + h,$$

где h^* — длина следующего частичного сегмента $[x_1,\, x_1+h^*]$.

Обратимся к частичной сумме смещенного ряда Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ с приближенными коэффициентами. Пусть $t = 2\alpha - 1$ и $\bar\Phi(t) = \Phi\bigl(\alpha(t)\bigr)$, тогда $a_i^*\bigl[\Phi(\alpha)\bigr] = a_i\bigl[\bar\Phi(t)\bigr]$, где a_i — коэффициенты ряда по несмещенным (обычным) многочленам Чебышёва. С учетом (44) имеем

$$\tilde S_k(\alpha,\Phi) = \tilde P_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\tilde P_k] T_i^*(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i\bigl[\bar\Phi(t)\bigr] T_i(t) + O(h^{k+s}). \qquad (46)$$

Используя выражение коэффициента Чебышёва функции через производную этой функции [4]

$$a_i\bigl[\bar\Phi(t)\bigr] = \frac{1}{2^{i-1}}\,\frac{\bar\Phi^{(i)}(\zeta_i)}{i!}\,, \qquad \zeta_i \in [-1,1]\,,$$

и упорядочивая сумму по степеням переменной t, получим

$$\begin{aligned}\tilde S_k(t,\bar\Phi) &= \sum_{i=0}^{k}{}' \,\frac{1}{2^{i-1}}\,\frac{\bar\Phi^{(i)}(\zeta_i)}{i!}\,T_i(t) + O(h^{k+s}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k}{}' \,\frac{1}{2^{i-1}}\left[\frac{1}{i!}\left(\frac{h}{2}\right)^i F^{(i)}(x_{1/2}) + O(h^{i+1})\right] T_i(t) + O(h^{k+s}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k}\Bigl(\frac{1}{i!}\left(\frac{h}{2}\right)^i F^{(i)}(x_{1/2}) + O(h^{i+1})\Bigr) t^i + O(h^{k+s}), \qquad x_{1/2} = x_0 + \frac{h}{2}\,.\end{aligned} \qquad (47)$$

Аналогично можно представить частичную сумму ряда Чебышёва функции $\Phi_1(\alpha)$:

$$\tilde S_k(t,\bar\Phi_1) = \sum_{i=0}^{k}\Bigl(\frac{1}{i!}\Bigl(\frac{h^*}{2}\Bigr)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O({h^*}^{i+1})\Bigr) t^i + O({h^*}^{k+s}), \qquad x_{3/2} = x_1 + \frac{h^*}{2}\,. \quad (48)$$

Для дальнейшего определим следующие матрицы: P — верхняя треугольная матрица Паскаля с элементами $p_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant k+1$, $1 \leqslant j \leqslant k+1$, $i \leqslant j$:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & k \\ & & 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \dots & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ & & & 1 & 4 & 10 & 20 & \dots & . \\ & & & & 1 & 5 & 15 & \dots & . \\ & & & & & 1 & 6 & \dots & . \\ & & & & & & 1 & \dots & . \\ & & 0 & & & & & \dots & . \\ & & & & & & & \dots & \dfrac{k(k-1)}{2} \\ & & & & & & & . & k \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix};$$

T и I — диагональные матрицы $(k+1)$-го порядка: $T = \left\{1, 1+\xi, (1+\xi)^2, \dots, (1+\xi)^k\right\}$ и $I = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^k\}$, где $\xi = h^*/h$ и $\omega = \xi/(1+\xi)$.

Введем векторы длины $k+1$:

$$Z(x_{1/2}) = \left(F(x_{1/2}), \frac{h}{2} F'(x_{1/2}), \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 F''(x_{1/2}), \dots, \frac{1}{k!}\left(\frac{h}{2}\right)^k F^{(k)}(x_{1/2})\right)^T,$$

$$Z(x_{3/2}) = \left(F(x_{3/2}), \frac{h^*}{2} F'(x_{3/2}), \frac{1}{2}\left(\frac{h^*}{2}\right)^2 F''(x_{3/2}), \dots, \frac{1}{k!}\left(\frac{h^*}{2}\right)^k F^{(k)}(x_{3/2})\right)^T.$$

Последовательно применяя линейные преобразования, задаваемые матрицами T, P и I, к вектору $Z(x_{1/2})$, приходим к следующим соотношениям:

$$TZ(x_{1/2}) = \left(F(x_{1/2}), \frac{h+h^*}{2} F'(x_{1/2}), \dots, \frac{1}{k!}\left(\frac{h+h^*}{2}\right)^k F^{(k)}(x_{1/2})\right)^T,$$

$$PTZ(x_{1/2}) = \left(F(x_{3/2}), \frac{h+h^*}{2} F'(x_{3/2}), \dots, \frac{1}{k!}\left(\frac{h+h^*}{2}\right)^k F^{(k)}(x_{3/2})\right)^T + O(h^{k+1}), \tag{49}$$

$$IPTZ(x_{1/2}) = Z(x_{3/2}) + O(h^{k+1}).$$

По поводу обоснования (49) см., например, гл. 4, формулу (58) на стр. 178 в [5].

Точные компоненты вектора $Z(x_{1/2})$ нам не известны, но приближения к ним могут быть получены из (47). Применяя указанные выше преобразования к вектору, составленному из этих приближений, мы получим компоненты вектора $Z(x_{3/2})$ с погрешностями $O(h^*)$, $O(h^{*^2})$, ..., $O(h^{*^{k+1}})$, а именно получим величины

$$d_i = \frac{1}{i!}\left(\frac{h^*}{2}\right)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O(h^{*^{i+1}}).$$

Далее составим полином переменной t с коэффициентами, равными числам d_i, и выполним с ним те преобразования, которые были использованы при выводе формул (46) — (48), но осуществим их в обратном порядке:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k} d_i t^i = \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{i!}\left(\frac{h^*}{2}\right)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O(h^{*^{i+1}})\right)t^i = \\
&= \sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{i!}\,\bar{\Phi}_1^{(i)}(0) + O(h^{*^{i+1}})\right)t^i = {\sum_{i=0}^{k}}'\left(\frac{1}{2^{i-1}}\,\frac{1}{i!}\,\bar{\Phi}_1^{(i)}(0) + O(h^{*^{i+1}})\right)T_i(t) = \\
&= {\sum_{i=0}^{k}}'\left(a_i\left[\bar{\Phi}_1(t)\right] + O(h^{*^{i+1}})\right)T_i(t) = {\sum_{i=0}^{k}}'\left(a_i^*\left[\Phi_1(\alpha)\right] + O(h^{*^{i+1}})\right)T_i^*(\alpha).
\end{aligned} \tag{50}$$

Таким образом, мы имеем в итоге коэффициенты Чебышёва функции $\Phi_1(\alpha)$ с погрешностями $O(h^*)$, $O(h^{*^2})$, ..., $O(h^{*^{k+1}})$, которые и принимаем за начальное приближение для неизвестных $a_i^*[\tilde{P}_k]$ на сегменте $[x_1,\, x_1 + h^*]$. Дальнейшее уточнение значений коэффициентов $a_i^*[\tilde{P}_k]$ выполняется с помощью итерационного процесса так, как это описано ниже в п. 6.

Ясно, что данный способ определения начального приближения может быть применен только начиная со второго элементарного сегмента.

6. Описание метода простой итерации для нахождения коэффициентов Чебышёва. Перейдем к описанию метода последовательных приближений для решения системы уравнений (32). Метод нахождения неизвестных $a_i^*[\tilde{P}_k]$ будем называть *вертикальным* методом или *вертикальным* процессом.

Допустим, что мы имеем некоторые приближенные значения коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$, $i = 0, 1, \ldots, k$. В качестве таких значений можно взять приближения, определяемые по формулам (40), (41) (первый способ определения начального приближения), или использовать приближения, полученные в результате выполнения цепочки преобразований, заданной формулой (50) (второй способ определения начального приближения). Примем эти значения в качестве нулевого приближения неизвестных $a_i^*[\tilde{P}_k]$. Обозначим это приближение через $a_i^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]$, полагая здесь $\nu = 0$, $i = 0, 1, \ldots, k$.

Определим ν-е приближение коэффициентов Чебышёва $a_i^*[U]$ решения U по формулам (5) для $i = 1, 2, \ldots, k+1$ и (6) для $i = 0$, а именно:

$$a_i^{*(\nu)}[U] = \frac{h}{4i}\Big(a_{i-1}^{*(\nu)}[\tilde{P}_k] - a_{i+1}^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]\Big), \qquad i = 1, 2, \ldots, k+1, \tag{51}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_0^{*(\nu)}[U] = y_0 + \frac{h}{4}\Big(a_0^{*(\nu)}[\tilde{P}_k] - \frac{1}{2}a_1^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]\Big) + \\ + \frac{h}{4}\sum_{j=2}^{k}(-1)^j\Big(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{j-1}\Big)a_j^{*(\nu)}[\tilde{P}_k].\end{aligned} \tag{52}$$

Входящие в формулу (51) коэффициенты Чебышёва $a_l^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]$ при $l \geqslant k+1$ полагаются равными нулю.

По найденным значениям коэффициентов Чебышёва вычисляем ν-е приближение для значений $U(x_0 + a_j^{(s)}h)$ по формуле (26), а именно:

$$U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(s)}h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^{*(\nu)}[U] \cdot T_i^*(\alpha_j^{(s)}) \tag{53}$$

и значения правой части дифференциального уравнения

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(s)}) = f\Big(x_0 + \alpha_j^{(s)}h, U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(s)}h)\Big). \tag{54}$$

Здесь $\alpha_j^{(s)}$ определяются по (9) или (17) в зависимости от вида используемой квадратурной формулы; $j = 1, 2, \ldots, k$ при $s = 1$ и $j = 1, 2, \ldots, k+1$ при $s = 2$.

Теперь находим следующее, $(\nu+1)$-е, приближение для коэффициентов Чебышёва правой части дифференциального уравнения по одной из квадратурных формул Маркова, в зависимости от того, какая квадратурная формула, (30) или (31), положена в основу системы уравнений (32). Если в (32) подразумевается квадратурная формула (30) (в этом случае полагаем $s = 1$), то $(\nu+1)$-е приближение для коэффициентов Чебышёва правой части определяется таким образом:

$$\begin{aligned}a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k] &= \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}'\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)})T_i^*(\alpha_j^{(1)}) = \\ &= \frac{4}{2k+1}{\sum_{j=0}^{k}}' f\big(x_0 + \alpha_j^{(1)}h, U^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(1)}h)\big)T_i^*(\alpha_j^{(1)}), \\ i &= 0, 1, \ldots, k.\end{aligned} \tag{55}$$

Если же в (32) имеется в виду квадратурная формула (31) (в этом случае полагаем $s=2$), то $(\nu+1)$-е приближение для коэффициентов Чебышёва правой части определяется подобным образом:

$$\begin{aligned} a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k] &= \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(2)}) T_i^*(\alpha_j^{(2)}) = \\ &= \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' f\big(x_0+\alpha_j^{(2)}h, U^{(\nu)}(x_0+\alpha_j^{(2)}h)\big) T_i^*(\alpha_j^{(2)}), \\ &i=0,1,\,\dots\,,k. \end{aligned} \tag{56}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k]$, $\nu=1,2,\,\dots\,$, вычисляются по такой же схеме с использованием формул (51)–(56) для $\nu=1,2,\,\dots\,$. Каждая вновь выполняемая итерация увеличивает порядок точности относительно h очередного приближения $a_i^{*(\nu)}[U]$, $U^{(\nu)}(x_0+\alpha_j^{(s)}h)$, $a_i^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]$ на единицу. При этом порядок точности данных приближений, т.е. порядок разностей между точными и приближенными значениями соответствующих величин, а именно:

$$y(x_0+\alpha_j^{(s)}h) - U^{(\nu)}(x_0+\alpha_j^{(s)}h), \qquad a_i^*[\Phi] - a_i^{*(\nu)}[\tilde{P}_k],$$

увеличивается до тех пор, пока не будет достигнут максимальный порядок точности решения, равный порядку точности формулы (26). Как следует из (25), этот порядок равен $O(h^{k+2})$. Итерации продолжаются или до достижения максимального порядка точности решения $U(x)$, или пока не будет достигнута заданная точность, или пока не будет сделано наперед заданное число итераций.

В качестве значений коэффициентов Чебышёва $a_i^*[y]$, $a_i^*[\Phi]$ решения $y(x_0+\alpha h)$ задачи Коши (1) и правой части (2) дифференциального уравнения (1)

$$\Phi(\alpha) = f\big(x_0+\alpha h, y(x_0+\alpha h)\big), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

принимаются значения, полученные на последней выполненной итерации $\nu+1$, а именно:

$$\begin{aligned} a_i^*[y] &= a_i^{*(\nu+1)}[U], \qquad i=0,1,\,\dots\,,k+1; \\ a_i^*[\Phi] &= a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k], \qquad i=0,1,\,\dots\,,k. \end{aligned} \tag{57}$$

7. Существование единственного решения системы уравнений относительно приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части и сходимость метода простой итерации. Для поиска решения системы (32) применим *принцип сжатых отображений* (см. гл. II, § 4 в [6]; гл.

7, § 4, п. 1, § 5. п. 1 в [7]; гл. VI, § 3, гл. VII, § 1, в [8]). Для этого оценим порядок относительно h частных производных функциий φ_i.

Обозначим l-ю компоненту вектор-функии φ_i через φ_{li}, а n-ю компоненту вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$ через a_{nm}. Найдем частную производную $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, где $i, m = 0, 1, \ldots, k$ и $l, n = 1, 2, \ldots, M$ (напомним, что M — число уравнений в системе (1)). В случае квадратурной формулы Маркова (15) с одним фиксированным узлом

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \left[\sum_{r=1}^{M} \frac{\partial f_l\big(x_j^{(1)}, U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big)}{\partial y_r} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial U_r\big(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big)}{\partial a_{nm}} \right] T_i^*(\alpha_j^{(1)}).$$

Учитывая, что каждая компонента вектора U зависит от одноименной компоненты вектора $a_m^*[\tilde{P}_k]$, получаем для частной производной следующее выражение

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{4}{2k+1} \sum_{j=0}^{k}{}' \frac{\partial f_l\big(x_j^{(1)}, U(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big)}{\partial y_n} \times$$
$$\times \frac{\partial U_n\big(x_j^{(1)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big)}{\partial a_{nm}} T_i^*(\alpha_j^{(1)}). \tag{58}$$

Для квадратурной формулы Маркова с двумя фиксированными узлами аналогично имеем:

$$\frac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = \frac{2}{k+1} \sum_{j=0}^{k+1}{}'' \frac{\partial f_l\big(x_j^{(2)}, U(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k])\big)}{\partial y_n} \times$$
$$\times \frac{\partial U_n\big(x_j^{(2)};\, a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\big)}{\partial a_{nm}} T_i^*(\alpha_j^{(2)}). \tag{59}$$

Как следует из формул (5), (6), выражение для частной производной $\dfrac{\partial U_n(x_0 + \alpha_j^{(s)} h)}{\partial a_{nm}}$ содержит множитель h. Следовательно, все слагаемые, входящие в (58) или (59) для частной производной $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}$, включают множитель h. При этом остальные сомножители во всех этих слагаемых являются ограниченными функциями. Поэтому найденная производная имеет порядок относительно h, равный $\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}} = O(h)$, $h \to 0$, и если h выбрать достаточно малым, то какая-нибудь норма матрицы, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\left|\dfrac{\partial\varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$, станет меньше единицы.

Далее, напомним порядок относительно h для некоторых других необходимых нам величин.

В п. 3 было показано, что невязка ρ_i, которая получается при подстановке в (32) точных значений коэффициентов Чебышёва правой части $\Phi(\alpha)$ уравнения (1) вместо приближенных значений $a_r^*[\tilde{P}_k]$, имеет порядок относительно h, равный

$$\begin{aligned}\rho_i &= a_i^*[\Phi] - \varphi_i\big(a_0^*[\Phi], \dots, a_k^*[\Phi]\big) = O(h^{k+2}), \qquad i = 0, 1, \dots, k-1;\\ \rho_k &= O(h^{k+s}), \qquad h \to 0,\end{aligned} \tag{60}$$

где $s = 1$ и $s = 2$ в зависимости от используемой квадратурной формулы Маркова, а именно: $s = 1$ для системы (30) и $s = 2$ для системы (31), при этом предполагается, что $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k + s$ включительно.

В п. 5 описаны два способа построения двух приближений $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$, $i = 0, \dots, k$, к коэффициентам $a_0^*[\Phi], \dots, a_k^*[\Phi]$, одно из которых имеет погрешность

$$a_i^*[\Phi] - a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] = O(h^2), \qquad i = 0, 1, \dots, k, \qquad \text{при} \qquad h \to 0, \tag{61}$$

а другое — погрешность

$$a_i^*[\Phi] - a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k] = O(h^{i+1}), \qquad i = 0, 1, \dots, k, \qquad \text{при} \qquad h \to 0. \tag{62}$$

Будем рассматривать множество элементов (точек), представляющих собой упорядоченные группы из $M(k+1)$ действительных чисел

$$a = (a_{10}, \dots, a_{M0}, a_{11}, \dots, a_{M1}, \dots, a_{1k}, \dots, a_{Mk}),$$

с расстоянием между его элементами, определяемым по формуле

$$\rho(\bar{a}, \bar{\bar{a}}) = \max_{\substack{1\leqslant n\leqslant M\\ 0\leqslant i\leqslant k}} |\bar{a}_{nm} - \bar{\bar{a}}_{nm}|. \tag{63}$$

Это множество точек является $M(k+1)$ – мерным метрическим пространством $R_\infty^{M(k+1)}$ [6].

Рассмотрим совокупность первых $k + 1$ коэффициентов Чебышёва $a_0^*[\Phi], \dots, a_k^*[\Phi]$ функции $\Phi(\alpha)$ как точку z_0 в $M(k+1)$-мерном метрическом пространстве $R_\infty^{M(k+1)}$:

$$z_0 = \left(a_0^*[\Phi],\, \dots,\, a_k^*[\Phi]\right) = \left(a_{10}^*[\Phi],\, \dots,\, a_{M0}^*[\Phi],\, \dots,\, a_{1k}^*[\Phi],\, \dots,\, a_{Mk}^*[\Phi]\right),$$

$$z_0 \in R_\infty^{M(k+1)}.$$

Если рассматривать элемент a как вектор $M(k+1)$-мерного нормированного пространства с нормой вектора $\|a\|_\infty$, то формулу (63) для расстояния можно записать так

$$\rho(\bar{a}, \bar{\bar{a}}) = \|\bar{a} - \bar{\bar{a}}\|_\infty. \tag{64}$$

Обозначим через G окрестность точки z_0 радиуса r, т.е. множество всех точек данного пространства

$$z = (a_0, a_1,\, \dots,\, a_k) = (a_{10},\, \dots,\, a_{M0}, a_{11},\, \dots,\, a_{M1},\, \dots,\, a_{1k},\, \dots,\, a_{Mk}),$$

$$z \in R_\infty^{M(k+1)},$$

для которых $\rho(z, z_0) = \|z - z_0\|_\infty \leqslant r$, где r — некоторое число, от h не зависящее. Пусть z — произвольная точка области $G : z \in G$. Обозначим через $a_i^*[U](a_0, a_1,\, \dots,\, a_k)$ коэффициенты Чебышёва функции $U(x) = U(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, на $[x_0,\, x_0 + h]$, вычисляемые через величины $a_0, a_1,\, \dots,\, a_k$ по описанному выше правилу, т.е. по формулам (5), (6), в левых частях которых надо y заменить на U, а в правых частях $a_q^*[\Phi]$ поменять на a_q при $0 \leqslant q \leqslant k$, а все остальные $a_q^*[\Phi]$, $q > k$, заменить нулями.

Сформулируем следующее предложение, содержащее условия, при которых нелинейная система уравнений (32), которую мы запишем в виде

$$a_i = \varphi_i(a_0,\, \dots,\, a_k), \qquad i = 0,\, \dots,\, k, \tag{65}$$

имеет единственное решение.

Теорема. *Пусть выполняются перечисленные ниже условия.*

1) *Для всех точек $z \in G\{\rho(z,\, z_0) \leqslant r\}$ и для всех h, меньших некоторого значения $h_1 : 0 < h \leqslant h_1$, $h_1 \leqslant X$, линейные комбинации вида*

$$U(x) = U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{l=0}^{k+1}}{}' a_l^*[U](a_0,\, \dots,\, a_k) T_l^*(\alpha), \qquad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

входящие в качестве второго аргумента функции $f(x, y)$ в (30) и (31), принимают на отрезке $[x_0,\, x_0 + h]$ значения, принадлежащие области D определения функции $f(x, y)$.

2) *При всех h, меньших некоторого значения h_2: $0 < h \leqslant h_2$, норма $K = \|Q\|_\infty$ матрицы Q, составленной из максимальных (в области изменения переменных) значений модулей частных производных $\left|\dfrac{\partial \varphi_{li}}{\partial a_{nm}}\right|$ (имеющих порядок $O(h)$ относительно h; $l, n = 1, \ldots, M$; $i, m = 0, \ldots, k$), меньше единицы.*

3) *При всех h, меньших некоторого значения h_3: $0 < h \leqslant h_3$, мажорантная оценка $O(h^{k+s})$ невязки ρ_i в (60) настолько мала, что выполняется неравенство*

$$\rho\bigl(\varphi(z_0), z_0\bigr) = \|\varphi(z_0) - z_0\|_\infty < (1-K)r, \qquad \varphi(z_0) = \bigl(\varphi_0(z_0), \ldots, \varphi_k(z_0)\bigr).$$

4) *При всех h, меньших некоторого значения h_4: $0 < h \leqslant h_4$, мажорантная оценка (61) или (62) погрешности начального приближения $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_k]$, $i = 0, \ldots, k$, настолько мала, что выполняется неравенство*

$$\rho(z_0, z^{(0)}) \leqslant r, \qquad z^{(0)} = \bigl(a_0^{*(0)}[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^{*(0)}[\tilde{P}_k]\bigr).$$

Тогда существует такое значение $h_0 > 0$, а именно: $h_0 = \min\{h_1, h_2, h_3, h_4\}$, что при всех h: $0 < h \leqslant h_0$, для задачи Коши (1), рассматриваемой на частичном отрезке $[x_0, x_0 + h]$, система уравнений (65) относительно приближенных значений коэффициентов Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ имеет в области $G\{\rho(z, z_0) \leqslant r\}$ единственное решение $z = \bigl(a_0^*[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^*[\tilde{P}_k]\bigr)$, которое можно получить методом простой итерации как предел последовательности

$$a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_k] = \varphi_i\bigl(a_0^{*(\nu)}[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^{*(\nu)}[\tilde{P}_k]\bigr), \qquad i = 0, 1, \ldots, k; \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

исходя из начального приближения $a_0^{*(0)}[\tilde{P}_k], \ldots, a_k^{*(0)}[\tilde{P}_k]$.

Доказательство. Так как $h \in (0, h_0]$, то все четыре условия теоремы выполняются одновременно при одном и том же значении h. К системе уравнений (65) относительно неизвестных приближенных значений коэффициентов Чебышёва функции $\Phi(\alpha)$ можно применить *принцип сжатых отображений* (см. гл. II, § 4, п. 1 в [6]). Действительно, в области $G\{\rho(z, z_0) \leqslant r\}$, где $z_0 = \bigl(a_0^*[\Phi], \ldots, a_k^*[\Phi]\bigr)$ — фиксированная точка пространства $R_\infty^{M(k+1)}$, система функций $\varphi_i(a_0, \ldots, a_k)$, $i = 0, \ldots, k$, определена и удовлетворяет условию Липшица с константой $K < 1$ (в силу первого и второго предположений теоремы). Это условие может быть записано в виде следующих неравенств: для скалярного дифференциального уравнений (1)

$$|\varphi_i(\bar{z}) - \varphi_i(\bar{\bar{z}})| \leqslant K \cdot \rho(\bar{z}, \bar{\bar{z}}) = K \cdot \|\bar{z} - \bar{\bar{z}}\|_\infty, \qquad i = 0, 1, \ldots, k,$$

для векторного дифференциального уравнения (1)

$$|\varphi_{li}(\bar{z}) - \varphi_{li}(\bar{\bar{z}})| \leqslant K \cdot \rho(\bar{z}, \bar{\bar{z}}) = K \cdot \|\bar{z} - \bar{\bar{z}}\|_\infty, \quad l = 1, \ldots, M, \quad i = 0, 1, \ldots, k.$$

В точке z_0 выполняется неравенство

$$\rho\big(\varphi(z_0), z_0\big) < (1 - K)r, \qquad \rho\big(\varphi(z_0), z_0\big) = \|\varphi(z_0) - z_0\|_\infty,$$

(в силу третьего условия теоремы). Начальное приближение $z^{(0)}$ принадлежит области G (в силу четвертого условия). Совокупность всех точек из G с расстоянием между элементами, определяемым по (63) или (64), образует полное метрическое пространство (см. гл. II, § 3, п. 1 в [6]). Теперь заключение нашей теоремы непосредственно следует из теоремы, уточняющей принцип сжатых отображений, применяемый как для исследования сходимости итерационных методов, так и для доказательства существования корня уравнения.

Для удобства читателя приведем формулировку теоремы, которая уточняет принцип сжатых отображений (см., например, гл. 7, § 4, п. 1, § 5, п.1 в [7]; а также гл. 7, § 1, замечание к теореме в [8]).

Теорема. *Пусть в полном метрическом пространстве R или на его части, содержащей окрестность S элемента y_0: $S = \{\rho(x, y_0) \leqslant r\}$, определен оператор Ax. Пусть для любых x, $y \in S$*

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha \rho(x, y)$$

и

$$\rho(Ay_0, y_0) \leqslant (1 - \alpha)r,$$

где α — некоторое фиксированное положительное число, меньшее единицы. Тогда в S существует одно и только одно решение уравнения $Ax = x$, которое может быть получено как предел последовательности $x_n = Ax_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, где x_0 — произвольный элемент из S.

Доказанную в данном разделе теорему можно распространить на произвольный частичный сегмент из интервала $[x_0,\, x_0 + X]$ существования решения задачи Коши (1) заменой x_0 на x_n, а $x_0 + h$ на $x_n + h$, т.е. заменой сегмента $[x_0,\, x_1]$ на сегмент $[x_n,\, x_{n+1}]$, $n = 1, 2, \ldots$.

8. Приближенное вычисление решения задачи Коши на одном элементарном сегменте. По найденным значениям коэффициентов Чебышёва $a_i^*\big[y(x_0 + \alpha h)\big]$ (см. (57)) частичная сумма ряда Чебышёва

$$y(x_0 + \alpha h) \approx U(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k+1}}' a_i^*[y] \cdot T_i^*(\alpha) \tag{66}$$

даст приближенное значение решения задачи Коши (1) в любой точке $x = x_0 + \alpha h$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h]$. В частности, в конце сегмента $[x_0,\, x_0 + h]$ значение решения может быть найдено по формуле:

$$y(x_0 + h) = y(x_1) \approx U(x_1) = \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]. \tag{67}$$

Погрешность приближенного значения решения $U(x_0 + h)$ есть $O(h^{k+2})$.

Так как коэффициенты Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ определяются приближенно с помощью приведенного выше итерационного процесса (см. п. 6), то указанная здесь оценка погрешности решения будет справедлива тогда, когда погрешности вычисления коэффициентов Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ имеют достаточный для этого порядок относительно h.

9. Практические способы оценки погрешности приближенного решения. В предыдущем разделе погрешность приближенного решения на элементарном сегменте была дана в виде своего порядка относительно длины h элементарного сегмента, т.е. была представлена в виде асимптотической оценки. Наша дальнейшая цель заключается в том, чтобы практически оценить разность между точным решением задачи (1) и приближенным решением этой задачи

$$y(x_0 + \alpha h) - U(x_0 + \alpha h),$$

которая представляет собой погрешность приближенного решения $U(x_0 + \alpha h)$ задачи Коши (1) на одном элементарном сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ длиной h, или *локальную погрешность*. Эту погрешность мы будем находить с помощью второго, более точного, приближенного решения, вычисленного специальным образом на том же элементарном сегменте и представленного частичной суммой ряда более высокого порядка.

9.1. Апостериорные оценки локальной погрешности метода. Рассмотрим первый элементарный сегмент $[x_0,\, x_0 + h]$, где $h \leqslant X$. Пусть на этом сегменте приближенное решение $U_{k+1}(x) = U_{k+1}(x_0{+}\alpha h) \approx y(x_0{+}\alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, задачи Коши (1), полученное описанным выше методом простой итерации, представляется в виде $(k+1)$-й частичной суммы (66) смещенного ряда Чебышёва при $k = k_1$

$$U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' a_i^*[U_{k_1+1}] T_i^*(\alpha),$$

и имеет порядок точности $O(h^{k_1+2})$ относительно h при $h \to 0$. Допустим, что на этом же сегменте рассматривается еще одно приближенное решение, которое также представляется в виде $(k+1)$-й частичной суммы (66) смещенного ряда Чебышёва при $k = k_2$, причем $k_2 > k_1$:

$$U_{k_2+1}(x_0+\alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_2+1}}{}' a_i^*[U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha),$$

и имеет порядок точности $O(h^{k_2+2})$ относительно h при $h \to 0$. Таким образом, имеют место следующие равенства

$$y(x_0+\alpha h) - U_{k_1+1}(x_0+\alpha h) = O(h^{k_1+2}), \quad y(x_0+\alpha h) - U_{k_2+1}(x_0+\alpha h) = O(h^{k_2+2}).$$

Отсюда следует, что погрешность приближенного решения $U_{k_1+1}(x)$ на элементарном сегменте $[x_0,\, x_0+h]$ можно представить в виде

$$y(x_0+\alpha h) - U_{k_1+1}(x_0+\alpha h) = U_{k_2+1}(x_0+\alpha h) - U_{k_1+1}(x_0+\alpha h) + O(h^{k_2+2}) =$$
$$= {\sum_{i=0}^{k_1+1}}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+1}] - a_i^*[U_{k_1+1}]\big) T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha) + O(h^{k_2+2}).$$

Отбрасывая остаточный член $O(h^{k_2+2})$, получаем оценку погрешности на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$

$$\begin{aligned} y(x_0+\alpha h) - U_{k_1+1}(x_0+\alpha h) \approx {}& {\sum_{i=0}^{k_1+1}}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+1}] - a_i^*[U_{k_1+1}]\big) T_i^*(\alpha) + \\ & + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha). \end{aligned} \tag{68}$$

В частности, в конце элементарного сегмента, т.е. для значения решения в точке x_0+h, погрешность приближенного решения, с учетом (67), можно оценить величиной

$$\begin{aligned} y(x_0+h) - U_{k_1+1}(x_0+h) \approx U_{k_2+1}(x_0+h) - U_{k_1+1}(x_0+h) = \\ = {\sum_{i=0}^{k_1+1}}{}' \big(a_i^*[U_{k_2+1}] - a_i^*[U_{k_1+1}]\big) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^*[U_{k_2+1}]. \end{aligned} \tag{69}$$

Из (68) следует еще одна оценка погрешности для l-й компоненты приближенного решения $U_{k_1+1}(x)$ на сегменте $[x_0,\, x_0+h]$:

$$\big|y^l(x_0+\alpha h) - U_{k_1+1}^l(x_0+\alpha h)\big| \leqslant {\sum_{i=0}^{k_1+1}}{}' \big|a_i^{*l}[U_{k_2+1}] - a_i^{*l}[U_{k_1+1}]\big| + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} \big|a_i^{*l}[U_{k_2+1}]\big|. \tag{70}$$

Сделаем некоторые замечания относительно порядка величин, фигурирующих в полученных оценках.

Если в основу описываемого метода положена квадратурная формула Маркова с одним фиксированным узлом (т.е. когда коэффициенты Чебышёва для $\Phi(\alpha)$ определяются из решения системы уравнений (30)), то разность коэффициентов $a_i^*[U_{k_2+1}]$ и $a_i^*[U_{k_1+1}]$, стоящая под знаком первой суммы в (68)–(70), имеет порядок $O(h^{k_1+2})$ относительно h при $i = 0,\ k_1 - 1,\ k_1 + 1$, и порядок $O(h^{k_1+3})$ при всех остальных i. Приведенные оценки верны, если $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k_2 + 1$ включительно. Если же метод основан на квадратурной формуле Маркова с двумя фиксированными узлами (т.е. когда коэффициенты Чебышёва для $\Phi(\alpha)$ определяются из решения системы уравнений (31)), то указанные разности коэффициентов $a_i^*[U_{k_2+1}]$ и $a_i^*[U_{k_1+1}]$ имеют порядок $O(h^{k_1+3})$ при всех $0 \leqslant i \leqslant k_1 + 1$. Независимо от того, входит или не входит граница x_0+h элементарного сегмента в число узлов применяемой формулы Маркова, вторая сумма в (68)–(70) всегда имеет порядок относительно h не ниже $O(h^{k_1+2})$. Приведенные оценки верны, если $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до порядка $2k_2 + 2$ включительно.

Теперь перейдем к определению оценивающего решения U_{k_2+1}.

9.2. Вычисление оценивающего решения U_{k_2+1}. Допустим, что в результате выполнения описанного в п. 6 итерационного процесса на элементарном сегменте $[x_0,\ x_0+h]$ за k_1 итераций получено приближенное решение в виде частичной суммы $U_{k_1+1}(x_0+\alpha h)$, имеющее порядок точности $O(h^{k_1+2})$. Рассмотрим теперь, как экономичней (с точки зрения числа арифметических операций) построить на этом же сегменте второе приближенное решение $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ более высокого порядка точности $O(h^{k_2+2})$, $k_2 > k_1$, избегая повторения дополнительного итерационного процесса длиной k_2 итераций. Напомним, что коэффициенты Чебышёва $a_i^*[U_{k+1}]$ приближенного решения $U_{k+1}(x)$ на элементарном сегменте $[x_0,\ x_0 + h]$ определяются через коэффициенты $a_i^*[\tilde{P}_k]$ Чебышёва его производной, а эти последние вычисляются с помощью квадратурной формулы Маркова. Не теряя общности, мы ограничимся далее в своем изложении случаем, когда коэффициенты Чебышёва для $\Phi(\alpha)$ определяются из решения системы (30).

Будем соблюдать следующую последовательность действий.

1) Вычисляем значения приближенного решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ в узлах $x_0 + \alpha_j^{(1)} h$, где $\alpha_j^{(1)}$ задаются в (9), но при $k = k_2$. Таких значений будет $k_2 + 1$ (с учетом значения $U_{k_2+1}(x_0) = U_{k_1+1}(x_0)$), и погрешность этих значений имеет порядок $O(h^{k_1+2})$ при $h \to 0$.

2) Вычисляем значения правой части уравнения (1) в узлах (9) квадратур-

ной формулы с погрешностью $O(h^{k_1+2})$:

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)}) = f\big(x_0 + \alpha_j^{(1)}h,\, U_{k_1+1}(x_0 + \alpha_j^{(1)}h)\big), \qquad j = 0, 1, \ldots, k_2.$$

3) Вычисляем приближенные коэффициенты Чебышёва $a_i^{*(0)}[\tilde{P}_{k_2}]$ правой части дифференциального уравнения (1) по квадратурной формуле Маркова с $k = k_2$:

$$a_i^{*(0)}[\tilde{P}_{k_2}] = \frac{4}{2k_2+1} {\sum_{j=0}^{k_2}}' f\big(x_0 + \alpha_j^{(1)}h,\, U_{k_1+1}(x_0 + \alpha_j^{(1)}h)\big) T_i^*(\alpha_j^{(1)}), \qquad i = 0, 1, \ldots, k_2,$$

порядок точности которых есть

$$a_i^*[\Phi] - a_i^{*(0)}[\tilde{P}_{k_2}] = O(h^{k_1+2}).$$

Эти значения коэффициентов мы рассматриваем как <u>начальное (нулевое) приближение</u> коэффициентов Чебышёва правой части, взятой на решении $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$: $a_i^{*(\nu)}[\tilde{P}_{k_2}]$ при $\nu = 0$. Здесь: $\tilde{P}_{k_2}(\alpha)$ – многочлен степени k_2, являющийся приближенным представлением производной $\Phi(\alpha)$:

$$\tilde{P}_{k_2}(\alpha) = {\sum_{i=0}^{k_2}}' a_i^*[\tilde{P}_{k_2}] T_i^*(\alpha).$$

4) Используя связи между коэффициентами Чебышёва функции и коэффициентами Чебышёва ее производной, задаваемые формулами (5), (6) или (51), (52), по найденным значениям приближенных коэффициентов Чебышёва правой части вычисляем ν-е приближение коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k_2 + 1$, приближенного решения $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$, где $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ — многочлен степени $k_2 + 1$:

$$U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h) = {\sum_{i=0}^{k_2+1}}' a_i^*[U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha).$$

Порядок точности этих коэффициентов есть

$$a_i^*[y] - a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}] = O(h^{k_1+3}) \quad \text{при} \quad \nu = 0.$$

5) По найденным приближенным коэффициентам Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]$ вычисляем ν-е приближение для значений решения $U_{k_2+1}(x_0+\alpha h)$ в узлах $x_0+\alpha_j^{(1)}h$, где $\alpha_j^{(1)}$ заданы в (9) при $k = k_2$, по формулам

$$U_{k_2+1}^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(1)}h) = {\sum_{i=0}^{k_2+1}}' a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha_j^{(1)}), \qquad j = 0, 1, \ldots, k_2, \tag{71}$$

и значения правой части дифференциального уравнения (1)

$$\tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)}) = f\big(x_0 + \alpha_j^{(1)} h,\, U_{k_2+1}^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(1)} h)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, k_2. \tag{72}$$

6) Теперь по квадратурной формуле Маркова с узлами (9) находим следующее, $(\nu+1)$-е, приближение для коэффициентов Чебышёва правой части уравнения (1), а именно:

$$\begin{aligned} a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_{k_2}] &= \frac{4}{2k_2+1} {\sum_{j=0}^{k_2}}' \tilde{\Phi}(\alpha_j^{(1)}) T_i^*(\alpha_j^{(1)}) = \\ &= \frac{4}{2k_2+1} {\sum_{j=0}^{k_2}}' f\big(x_0 + \alpha_j^{(1)} h,\, U_{k_2+1}^{(\nu)}(x_0 + \alpha_j^{(1)} h)\big) T_i^*(\alpha_j^{(1)}), \\ & i = 0, 1, \ldots, k_2. \end{aligned} \tag{73}$$

Дальнейшие приближения для коэффициентов Чебышёва $a_i^{*(\nu)}[U_{k_2+1}]$, $a_i^{*(\nu+1)}[\tilde{P}_{k_2}]$, $\nu = 1, 2, \ldots$, вычисляются итерационным способом по такой же схеме с повторением шагов 4, 5, 6 и использованием формул (71)–(73) для $\nu = 1, 2, \ldots$.

Данный итерационный процесс полностью аналогичен итерационному процессу, применяемому для построения решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$, и его сходимость вытекает из теоремы, приведенной в п. 7. Для того чтобы погрешность приближенного решения $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ имела порядок $O(h^{k_2+2})$ при $h \to 0$, необходимо выполнить в данном итерационном процессе не менее $k_2 - k_1$ итераций. Таким образом, для вычисления обоих решений $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ и $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ требуется всего k_2 итераций, что меньше суммарного числа итераций, которое понадобилось бы выполнить для определения обоих решений в том случае, когда решение $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ вычисляется независимо от решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$.

10. Интегрирование с контролем точности. Автоматическое разбиение промежутка интегрирования на элементарные сегменты. Имея в распоряжении способы (69), (70) оценки погрешности приближенного решения на одном элементарном сегменте, величину элементарного (частичного) сегмента можно выбирать автоматически в процессе счета. При этом можно исходить из того, чтобы на каждый элементарный сегмент $[x_s,\, x_s + h]$ приходилась приблизительно одинаковая погрешность ε.

Обозначим величину погрешности для l-й компоненты приближенного решения $U_{k_1+1}^l$, определяемую по формуле (69) или (70), через E^l, $l = 1, \ldots, M$. Если для всех компонент решения, которые требуются проверять на точность, выполняется неравенство $|E^l| \leqslant \varepsilon$ (или $\|E\|_\infty \leqslant \varepsilon$), то считается, что полученная частичная сумма $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, удовлетворяет на элементарном сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ заданной точности ε, и она принимается в качестве приближенного решения задачи Коши (1) на данном элементарном сегменте. Вместо коэффициентов $a_i^*[U_{k_1+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k_1 + 1$, можно взять коэффициенты $a_i^*[U_{k_2+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, k_1 + 1$, частичной суммы $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, поскольку последние имеют более высокий порядок точности относительно h по сравнению с коэффициентами $a_i^*[U_{k_1+1}]$. Тогда в качестве приближенного решения на сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ берется следующая сумма

$$S_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k_1+1}{}' a_i^*[U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha),$$

которая, по-прежнему, будет иметь тот же порядок точности $O(h^{k_1+2})$, что и $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$. В качестве приближения в конце элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h]$, т.е. в точке $x_1 = x_0 + h$, можно также взять значение этой суммы $S_{k_1+1}(x_0 + h)$ в точке x_1 либо значение $U_{k_2+1}(x_0 + h)$, как имеющее более высокий порядок точности $O(h^{k_2+2})$ по сравнению с приближенным решением $U_{k_1+1}(x_0 + h)$ или $S_{k_1+1}(x_0 + h)$. Так как погрешность E имеет порядок $O(h^{k_1+2})$, то справедливо представление $E = ch^{k_1+2}$, где $c = \mathrm{const}$. Длина следующего элементарного сегмента $[x_1, x_1 + h_\varepsilon]$ определяется с помощью соотношения

$$h_\varepsilon = \xi h, \tag{74}$$

где ξ находится из условия выполнения равенства $\|ch_\varepsilon^{k_1+2}\|_\infty = \varepsilon$ или $\|c\xi^{k_1+2}h^{k_1+2}\|_\infty = \varepsilon$. Отсюда получаем

$$\xi = \sqrt[k_1+2]{\frac{\varepsilon}{\|E\|_\infty}}\,. \tag{75}$$

Здесь $\xi \geqslant 1$ и значение длины следующего элементарного сегмента $[x_1,\, x_1 + h_\varepsilon]$ больше длины предыдущего элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h]$.

Если оценка погрешности приближенного решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ превосходит наперед заданную границу ε: $\|E\|_\infty > \varepsilon$, то считается, что на данном сегменте $[x_0,\, x_0 + h]$ приближенное решение $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ не достигает требуемой точности. В этом случае выбирается новая длина элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h_\varepsilon]$ по формулам (74), (75). Теперь $\xi < 1$ и новая длина элементарного сегмента $[x_0,\, x_0 + h_\varepsilon]$ меньше предыдущей.

В действительности берется несколько меньшее, чем (75), значение ξ, например $\xi^* = 0,9\xi$, и соответственно меньшее, чем (74), значение длины элементарного сегмента $h_\varepsilon^* = \xi^* h$. Это делается для того, чтобы избежать тех элементарных сегментов, на которых не достигается требуемая точность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Основы применения рядов Чебышёва при построении численно-аналитических методов для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений (Учебное пособие). М.: НИВЦ МГУ, 2022.
2. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Квадратурные формулы Маркова и их применение в ортогональных разложениях (Учебное пособие). М.: НИВЦ МГУ, 2022.
3. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Квадратурная формула Маркова с двумя фиксированными узлами и ее применение в ортогональных разложениях (Учебное пособие). М.: НИВЦ МГУ, 2023.
4. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышёва. М.: Наука, 1983.
5. *Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф.* Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране. М.: Изд-во МГУ, 1990.
6. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. 6-е изд., испр. М.: Наука, 1989.
7. *Березин И.С., Жидков Н.П.* Методы вычислений. Т.2. М.: Физматгиз, 1962.
8. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1987.